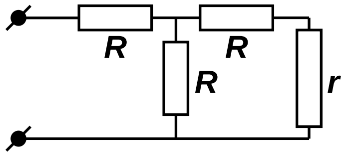
10 класс

Задача 1. (10 баллов)



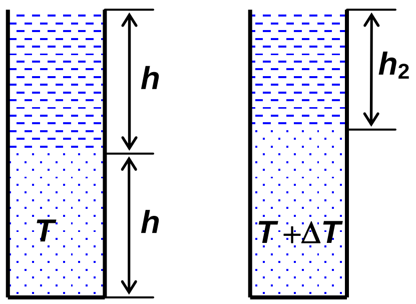
Чему должно быть равно сопротивление ***r*** на схеме, чтобы сопротивление между входными клеммами было таким же? Сопротивление ***R*** считать известным.

Решение:

Два последовательно соединенных резистора r и R имеют общее эквивалентное сопротивление $r+R$ (**1 балл**). Параллельно с ними подключен резистор R. Общее сопротивление этих трех резисторов составит $\frac{R(r+R)}{r+2R}$ (**3 балла**). Оставшийся резистор R соединен с этим комплексом последовательно, поэтому полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке, составит $R+\frac{R(r+R)}{r+2R}$ (**2 балла**). По условию задачи данное сопротивление равно искомому r, это даст уравнение $R+\frac{R(r+R)}{r+2R}=r$ (**1 балл**), решая которое, находим $r=R\sqrt{3}$ (**3 балла**).

Ответ: $r = R\sqrt{3}$.

Задача 2. (10 баллов)



В вертикальном цилиндрическом сосуде (тонкой трубке) поверх столба воздуха высотой ***h*** = 50 см при температуре ***T*** = 27°С помещен столб воды такой же высоты, причем вода залита до открытого края трубки. Какова будет высота столба воды $\boldsymbol{h_2}$ после нагрева системы на **Δ*T*** = 20°С? Атмосферное давление $\boldsymbol{p_0}$ = 10^5 Па.

Решение:

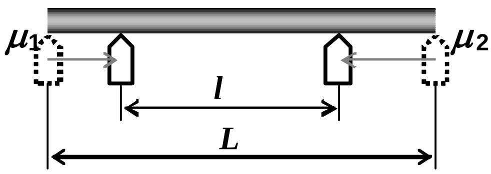
В состоянии равновесия давление газа в сосуде под столбом воды p_1 равно сумме атмосферного давления p_0 и гидростатического давления столба жидкости ρgh: $p_1 = p_0 + \rho gh$, аналогично для второго состояния $p_2 = p_0 + \rho gh_2$ (**2 балла**). Давление газа в обоих случаях можно выразить из уравнения состояния идеального газа: $p_1 = \frac{\nu RT}{Sh}$, $p_2 = \frac{\nu R(T+\Delta T)}{S(2h-h_2)}$, здесь ν – количество вещества газа, S – площадь сечения трубки (**2 балла**). Это позволяет получить квадратное уравнение $h_2^2 + (H_0 - 2h)h_2 + (H_0 + h)h\frac{T+\Delta T}{T} - 2H_0 h = 0$ (**3 балла**), из которого можно определить h_2. Здесь введено обозначение $H_0 = \frac{p_0}{\rho g}$. Столб жидкости такой высоты производит давление равное атмосферному. Положительное решение этого уравнения имеет вид $h_2 = \frac{1}{2}\left[2h - H_0 + \sqrt{H_0^2 - 4(H_0 + h)h\frac{\Delta T}{T}}\right]$ (**2 балла**), подставляя численные значения, получим $h_2 \approx 46\,см$. (**1 балл**)

Можно получить приближенный ответ, полагая, что $H_0^2 \gg 4(H_0 + h)h\frac{\Delta T}{T}$ и $h \ll H_0$, тогда $h_2^{\sim} = h\left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right)$.

Ответ: $h_2 = \frac{1}{2}\left[2h - H_0 + \sqrt{H_0^2 - 4(H_0 + h)h\frac{\Delta T}{T}}\right] \approx 46\,см$.

Задача 3. (10 баллов)

Известен следующий способ нахождение центра масс приблизительно однородной палки: концы палки кладут на пальцы, которые затем медленно начинают сдвигать (см. рисунок). Когда пальцы соприкоснутся, центр масс палки окажется над ними. Если же, например, одна из рук будет в перчатке, а другая нет, то коэффициенты сухого трения в точках касания будут различны: μ_1 и $\mu_2 < \mu_1$. Можно ли теперь использовать описанный выше способ при определении центра масс палки? Найдите расстояния от пальцев до центра масс как функции расстояния l между ними, если изначально палка длиной L положена на пальцы концами. Силу трения считайте не зависящей от скорости движения пальцев.



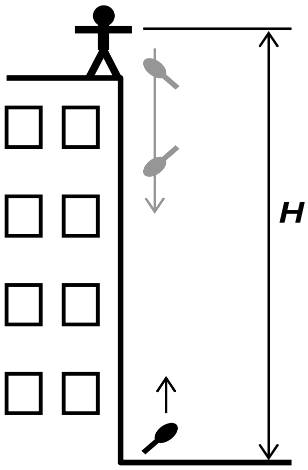
Решение:

Пусть x_1, x_2 – расстояния от пальцев до центра масс палки; N_1, N_2 – вертикальные силы реакции, а F_1, F_2 – горизонтальные силы трения, действующие на палку со стороны пальцев. Первоначально $N_1 = N_2$. Поскольку $\mu_1 > \mu_2$, то первый палец будет оставаться в покое на расстоянии $x_1 = L/2$ от центра масс, а второй палец будет двигаться, находясь на расстоянии $x_2 = l - L/2$ (**2 балла**). Сила трения F_2, действующая со стороны движущегося второго пальца, равна $\mu_2 N_2$ и постепенно возрастает. Так будет происходить до тех пор, пока сила трения F_1 не достигнет своего максимального значения $\mu_1 N_1$, после чего оба пальца будут приближаться к центру масс одновременно. Сумма моментов сил N_1, N_2 относительно центра масс при движении пальцев равна нулю, т.е. $x_1 N_1 = x_2 N_2$ (**2 балла**). Вместе с тем разность сил трения F_1 и F_2, действующих в разных направлениях по горизонтали, обращается в нуль: $\mu_1 N_1 = \mu_2 N_2$ (**2 балла**). Учитывая, что $x_1 + x_2 = l$, получим $x_1 = \frac{\mu_1 l}{\mu_1 + \mu_2}$, $x_2 = \frac{\mu_2 l}{\mu_1 + \mu_2}$ (**2**

балла). Расстояние между пальцами l^*, при котором первый палец начнет двигаться, можно определить, полагая $x_1 = \dfrac{\mu_1 l^*}{\mu_1 + \mu_2} = \dfrac{L}{2}$, откуда $l^* = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1} L$ (**2 балла**).

Ответ: $x_1 = \begin{cases} \dfrac{L}{2}, & l > \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1} L; \\ \dfrac{\mu_1 l}{\mu_1 + \mu_2}, & l \le \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1} L; \end{cases}$ $\quad x_2 = \begin{cases} l - \dfrac{L}{2}, & l > \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1} L; \\ \dfrac{\mu_2 l}{\mu_1 + \mu_2}, & l \le \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1} L. \end{cases}$

Задача 4. (10 баллов)



Выдернув чеку, с высоты ***H*** роняют осколочную гранату. В некоторый момент времени после неупругого вертикального отскока от земли она взрывается, а выделившаяся при взрыве энергия ***U*** уходит в кинетическую энергию осколков оболочки. В какой момент времени после отскока взрыв представляет наибольшую угрозу для человека, уронившего гранату? На какую максимальную высоту при этом поднимутся осколки, если кинетическая энергия гранаты при отскоке от земли изменится в ***K*** раз? После взрыва покоящейся гранаты осколки оболочки разлетаются с одинаковыми по модулю скоростями; масса оболочки гранаты – ***m***.

Решение

Кинетическая энергия гранаты сразу после отскока:

$$E_{\text{кин}} = \frac{Mv_0^2}{2} = KMgH \text{ , } (\textbf{1 балл})$$

где M и v_0 – масса и скорость гранаты в момент отскока, соответственно. При взрыве на высоте h скорость гранаты v определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + Mgh; \quad v^2 = 2g(KH - h). \ (\textbf{2 балла})$$

При этом в системе отсчета, связанной с центром масс гранаты, в момент взрыва все осколки разлетаются в разные стороны с одинаковой по модулю скоростью u, определяемой из того условия, что выделяющаяся при взрыве энергия переходит в кинетическую энергию фрагментов оболочки: $u = \sqrt{2U / m}$ (**2 балла**). Скорость осколков, летящих вверх, оказывается равна

$$V = v + u \text{ , } (\textbf{2 балла})$$

а высота подъема для этих обломков определяется из закона сохранения энергии:

$$gH_{\max} = gh + \frac{V^2}{2} =$$
$$= gKH + \frac{U}{m} + \sqrt{\frac{4Ug}{m}(KH - h)}.$$ **(2 балла)**

Достигаемая осколками высота $H_{\max}$, принимает наибольшее значение при $h = 0$:

$$H_{\max} = KH + \frac{U}{mg} + \sqrt{\frac{4KHU}{mg}}.$$ **(1 балл)**

(Примечательно, что при взрыве гранаты в верхней точке своей траектории $h = KH$, $H_{\max}$ принимает наименьшее значение).

Ответ: Наибольшую угрозу представляет взрыв в низшей точке, т.е. сразу после отскока. Максимальная высота подъема осколков при этом $H_{\max} = KH + \frac{U}{mg} + \sqrt{\frac{4KHU}{mg}}$.